Całka nieoznaczona - całkowanie wybranych funkcji trygonometrycznych

Poniżej omówione zostaną niektóre typy całek funkcji trygonometrycznych.

I. Do pierwszego typu zaliczymy całki, które można sprowadzić do wzorów (lub metod) podstawowych poprzez zastosowanie różnych tożsamości trygonometrycznych. Jako ilustrację podamy przykład całki, przy obliczaniu której skorzystamy z jednego z następujących wzorów:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right],$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right],$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right].$$

Przykład. Obliczyć całkę

$$\int \cos 4x \cos 2x\, dx\,.$$

Rozwiązanie. Tu skorzystamy najpierw z trzeciego z podanych wyżej wzorów

$$\int \cos 4x \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos 6x + \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int \cos 6x dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx.$$

Obie otrzymane całki możemy obliczyć przez odpowiednie podstawienia, ewentualnie skorzystać z gotowego wzoru (16). Otrzymujemy

$$\int \cos 4x \cos 2x\, dx = \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 2x + C\,.$$

II. Całki postaci: $\int \sin^n x dx$, $\int \cos^n x dx$ (n – liczba naturalna).

Tego tupu całki można obliczyć korzystając z następujących wzorów:

(22) $$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx\,,$$

(23) $$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx\;.$$

Przykład. Obliczyć całkę

$$\int \cos^3 x dx\,,$$

Rozwiązanie.

$$\int \cos^3 x dx = \frac{1}{3}\sin x\cos^2 x + \frac{2}{3}\int \cos x dx = \frac{1}{3}\sin x\cos^2 x + \frac{2}{3}\sin x + C\,.$$

Uwaga. W przypadku, gdy n jest liczbą nieparzystą, całki omawianego typu można również obliczyć przez podstawienie. W tym celu z funkcji podcałkowej wydzielamy pojedynczy czynnik ($\sin x$ lub $\cos x$), a to co zostało po wydzieleniu przekształcamy wykorzystując jedynkę trygonometryczną. Następnie wykonujemy odpowiednie podstawienie. Dla naszego przykładu wyglądałoby to następująco:

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x dx = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= \int (1-t^2)dt = t - \frac{1}{3}t^3 + C = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C .$$

III. Całki postaci $\int \sin^m x \cos^n x dx$ (m i n – liczby naturalne).

Można wyróżnić tutaj dwa przypadki:

1. Liczba m lub n jest nieparzysta.

   W tym przypadku postępujemy analogicznie, jak to zostało opisane w uwadze do poprzedniego przykładu. Oczywiście wydzielenia dokonujemy z nieparzystej potęgi (jeżeli obie potęgi są nieparzyste, to lepiej z niższej wydzielić odpowiedni czynnik), a to co pozostanie po wydzieleniu przekształcamy korzystając z jedynki trygonometrycznej. Po takich przekształceniach funkcji podcałkowej stosujemy metodę całkowania przez podstawienie.

   Przykład. Obliczyć całkę

$$\int \sin^6 x \cos^3 x dx .$$

   Rozwiązanie.

$$\int \sin^6 x \cos^3 x dx = \int \sin^6 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^6 x (1-\sin^2 x)\cos x dx = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= \int t^6(1-t^2)dt = \int (t^6 - t^8)dt = \frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{9}t^9 + C = \frac{1}{7}\sin^7 x - \frac{1}{9}\sin^9 x + C .$$

2. Liczby m i n są parzyste.

   W tym przypadku do jednego z czynników (dla skrócenia obliczeń lepiej wziąć ten z niższą potęgą) stosujemy wzór na jedynkę trygonometryczną, a następnie wyjściową całkę przekształcamy w taki sposób, aby otrzymać sumę pewnej ilości całek typu II.

   Przykład. Obliczyć całkę

$$\int \cos^4 x \sin^2 x dx .$$

   Rozwiązanie.

$$\int \cos^4 x \sin^2 x dx = \int \cos^4 x (1-\cos^2 x)dx = \int \cos^4 x dx - \int \cos^6 x dx .$$

   Do obu całek będziemy stosować wzór (23), aby jednak zapis był bardziej przejrzysty zaczniemy od całki $\int \cos^2 x dx$, którą wykorzystamy do obliczenia całki $\int \cos^4 x dx$, a ta z kolei będzie nam potrzebna do obliczenia całki $\int \cos^6 x dx$:

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}x + C ,$$

$$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{4}\sin x \cos^3 x + \frac{3}{4}\int \cos^2 dx = \frac{1}{4}\sin x \cos^3 x + \frac{3}{8}\sin x \cos x + \frac{3}{8}x + C ,$$

$$\int \cos^6 x dx = \frac{1}{6}\sin x \cos^5 x + \frac{5}{6}\int \cos^4 dx =$$

$$= \frac{1}{6}\sin x \cos^5 x + \frac{5}{24}\sin x \cos^3 x + \frac{5}{16}\sin x \cos x + \frac{5}{16}x + C .$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\int \cos^4 x \sin^2 x dx = \int \cos^4 x dx - \int \cos^6 x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\sin x \cos^3 x + \frac{3}{8}\sin x \cos x + \frac{3}{8}x - \frac{1}{6}\sin x \cos^5 x - \frac{5}{24}\sin x \cos^3 x -$$

$$-\frac{5}{16}\sin x \cos x - \frac{5}{16}x + C = -\frac{1}{6}\sin x \cos^5 x + \frac{1}{24}\sin x \cos^3 x +$$

$$+\frac{1}{16}\sin x \cos x + \frac{1}{16}x + C .$$

Oczywiście można było również wyższą potęgę przekształcić z jedynki trygonometrycznej:

$$\int \cos^4 x \sin^2 x dx = \int \left(\cos^2 x\right)^2 \sin^2 x dx = \int (1-\sin^2)^2 \sin^2 x dx =$$

$$= \int (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)\sin^2 x dx = \int \sin^2 x dx - 2\int \sin^4 x dx + \int \sin^6 x dx .$$

Do obliczenia otrzymanych całek wykorzystujemy tym razem wzór (22). Dalsze obliczenia pozostawimy Czytelnikowi.

IV. Całki postaci $\int R(\sin x, \cos x)dx$, gdzie symbol $R(\sin x, \cos x)$ oznacza funkcję wymierną względem $\sin x$ i $\cos x$.

Całkę tego typy obliczamy sprowadzając ją do całki funkcji wymiernej poprzez podstawienie:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = t \ , \ -\pi < x < \pi .$$

Stąd $x = 2\operatorname{arctg} x$ i dalej $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$.

Dodatkowo korzystamy jeszcze z następujących zależności:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x} = \frac{2t}{1+t^2} \ , \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x} = \frac{1-t^2}{1+t^2} .$$

Przykład. Obliczyć całki:

a) $\int \frac{dx}{2+\cos x}$, b) $\int \frac{2+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$.

Rozwiązanie.

a) $$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \left| \begin{array}{ll} \operatorname{tg}\frac{1}{2}x = t & \\ x = 2\operatorname{arctg} t & \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt & \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt =$$

$$= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2+2t^2}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt = \int \frac{2}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{t^2+3}dt = 2\int \frac{dt}{t^2+3} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{3} + C\,,$$

b) $$\int \frac{2+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx = \left| \begin{array}{ll} \operatorname{tg}\frac{1}{2}x = t & \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ x = 2\operatorname{arctg} t & \\ dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt & \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{2+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = 2\int \frac{1+\frac{t}{1+t^2}}{t\cdot\left(\frac{1+t^2}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}dt =$$

$$= 2\int \frac{1+t^2+t}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2t}dt = \int \frac{t^2+t+1}{t}dt = \int\left(t+1+\frac{1}{t}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}t^2 + t + \ln|t| + C = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x + \operatorname{tg}\frac{1}{2}x + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right| + C\,.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Obliczyć całki:

94. $\int \sin 3x \sin 5x\, dx$,

95. $\int \sin 3x \cos 2x\, dx$,

96. $\int \sin^2 x dx$,

97. $\int \cos^2 x dx$,

98. $\int \sin^3 x dx$,

99. $\int \cos^5 x dx$,

100. $\int \sin^4 x dx$,

101. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$,

102. $\int \sin^3 x \cos^5 x dx$,

103. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$,

104. $\int \frac{dx}{\sin x}$,

105. $\int \frac{dx}{\cos 3x}$,

106. $\int \frac{dx}{5+4\cos x}$,

107. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$,

108. $\int \frac{dx}{3\cos x+\sin x+1}$,

109. $\int \frac{dx}{\cos x+\sin x+1}$,

110. $\int \frac{dx}{3+2\sin x}$,

111. $\int \frac{dx}{(3+\sin x)\cos x}$.

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch